

تاريخ موجز جداً للانهاية

بيير هنريكييت

دكتوراه في الفيزياء النووية وكاتب عمود في Polytechnique Insights

إعداد وترجمة : د. جواد بشارة

باختصار

- اللانهاية هو مفهوم رياضياتي جاء إلينا من زينون إيليا (حوالي 450 قبل الميلاد) الذي حاول إظهار استحالة اللانهاية "المادية". سيؤدي هذا إلى "مفارقة السهم"، والتي سيتم حلها لاحقاً.
- سيحاول العديد من علماء الرياضيات والفيزياء بعد ذلك فهم اللانهاية وتفسيرها من خلال نظريات وتجارب مختلفة.
- سيذهب جورج كانتور أبعد من أي شخص آخر بطرح سؤال بسيط: هل يمكننا مقارنة مجموعتين لا نهائيتين؟ هل يمكن لأحدهما أن يكون "أكبر" من الآخر؟
- تتمثل طريقته في مزوجة عنصر من المجموعة الأولى مع عنصر من المجموعة الثانية. إذا وجد كل عنصر شريكه ولم يبق أي عنصر بمفرده (نسمي هذا الاعتراض)، فيمكننا أن نقول بعد ذلك أن المجموعتين متساويتان.
- يتم إنشاء ندفة الثلج فان خوخ بإضافة مثلث على كل حافة من الشكل السابق ولها، في الواقع، محيط لا نهائي.
- تم اعتبار اللانهاية في وقت آخر مفهومًا مقدسًا لاسيما عن الأديان التوحيدية (الله وحده لانهاية) أو مفهومًا ميتافيزيقيًا (لن يتمكن العقل البشري أبدًا من تصويره بشكل كامل)، وقد دخلت اللانهاية منذ ذلك الحين مجال العلوم والتكنولوجيا. اليوم، ندرس المفهوم، نقيسه ونقارنه ونستخدمه تقريبًا مثل الرقم العادي.
- ولكن ما هي اللانهاية؟ وكيف تعلمنا ترويضها؟

قصة قديمة:

- من الجلي أن التساؤل حول اللانهاية قديم قدم الإنسانية. وللأسف فإن الكتابات التي تشهد على ذلك نادرة لأنها قديمة. نحن نعلم أن فلاسفة الألفية الأولى قبل الميلاد كانوا يتعجبون بالفعل من الخصائص المذهلة لللانهاية.
- لكن هل اللانهاية مجرد مفهوم؟ فكرة غريبة يلعب بها علماء الرياضيات؟ أم أن لها علاقة بالعالم من حولنا؟ هل هناك أي شيء لانهاية حقاً؟
- بالنسبة لأناكسيماندر، اللانهاية هي المبدأ المؤسس للواقع. ومنه يولد عدد لا حصر له من العوالم التي تملأ حجم الكون، ولكل عالم واقعه الخاص. من ناحية أخرى، يرى هيراقليطس أن الزمن لا نهائي. كان دائماً كذلك وسيظل دائماً كذلك، ليس له بداية ولا نهاية ولا حدود. ومن خلاله ندرك وجودنا.
- وبالطبع فإن أيًا من هذه التأكيدات لا تدعمه «تجربة» أو «قياس» كما نفهمها اليوم في المنهج العلمي. إنه موقف فلسفي يميز مدرسة فكرية عن أخرى.

من الرياضيات إلى الفيزياء:

اللانهاية هي في المقام الأول مفهوم رياضي. وعلماء الرياضيات هم الذين تناولوا الأمر لمراقبته باستخدام عدسة مكبرة. يحاول زينون الإيلي (حوالي 450 قبل الميلاد) إظهار الاستحالة "المادية" لللانهاية، ليس عن طريق قياسه، بل على العكس من ذلك من خلال استخدامه لتقسيم الأشياء إلى عناصر أصغر من أي وقت مضى. إضافة $2/1 + 4/1 + 8/1 + 16/1 + \dots$ هو نفس إضافة $2/1 + 2^2/1 + 23/1 + \dots + 24/1$

هذه المتسلسلة تسمى متسلسلة هندسية وتكتب على الشكل:

حلها بسيط جداً. عندما تتجه n نحو اللانهاية، فإن قيمة هذا المجموع تتجه بشكل طبيعي نحو 1.

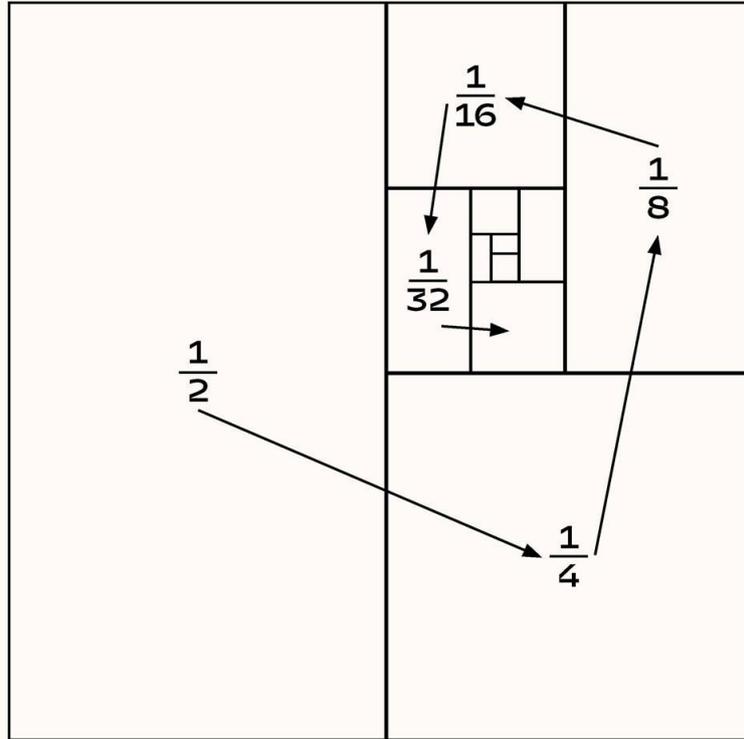
دقة الرسومات الخاصة بها أبسط. في الشكل أدناه، نرى بشكل حدسي أنه لملء مربع من الجانب 1، يجب علينا جمع العناصر التي تتوافق مساحتها تمامًا مع السلسلة أعلاه.

المتسلسلة الهندسية $n12$ تملأ مربعًا طول ضلعه (ومساحته) يساوي 1

ما كان يفتقده زينو هو النتيجة غير البديهية المتمثلة في أن مجموع عدد لا حصر له من الأرقام لا يعطي دائمًا نتيجة لا نهائية.

وينتج عن ذلك "مفارقته" الشهيرة للسهم الذي، حسب قوله، لا ينبغي أن يصل إلى هدفه أبدًا. في الواقع، يمكنك دائمًا تقسيم المسار المتبقي على اثنين وسيكون هناك دائمًا جزء من المسار الذي يجب قطعه ($2/1$ ، $4/1$ ، $8/1$ ، $16/1$ ، $32/1$)، إلى ما لا نهاية.

وبقدر ما يستغرق قطع المسافة بين القوس والهدف عددًا لا نهائيًا من الخطوات، يخلص زينو إلى أنه من المستحيل أن يصل السهم إلى وجهته في وقت محدد.



تم حل هذه المفارقة في وقت لاحق من خلال أحد فروع الرياضيات التي تدرس مجاميع لا حصر لها من الأرقام: المتسلسلة. التي تتيحها لنا الرياضيات لقياس وحساب وفهم بيئتنا.

ما كان يفتقده زينو هو النتيجة غير البديهية المتمثلة في أن مجموع عدد لا حصر له من الأرقام لا يعطي دائماً نتيجة لا نهائية.

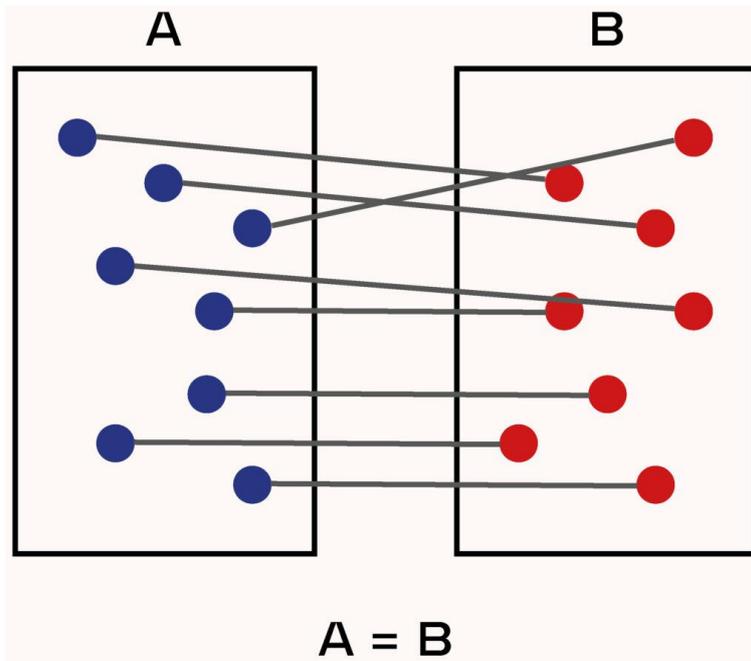
بمعنى آخر، ليس بسبب أن مسار السهم يمكن تقسيمه إلى عدد لا نهائي، فإن الزمن الذي سيستغرقه السفر عبرها سيكون لا نهائياً. تم حل المفارقة. يمكن للسهم الآن أن تصل إلى هدفها براحة بال تامة.

وفي وقت لاحق، أتقن إسحاق نيوتن الشهير فن قياس القيم الصغيرة بشكل تعسفي من خلال تطوير حساب التفاضل والتكامل المتناهي الصغر. وهذا يؤدي إلى المشتقات (والتكاملات) الشهيرة التي لا تستطيع الرياضيات، بل و أيضاً الفيزياء الحديثة، الاستغناء عنها اليوم لوصف العالم وفهمه. لا حاجة لفهم أو تصور اللانهاية لاستخدامها. إن اللانهاية $Infinity-l'infini$ هي في نهاية المطاف مجرد أداة واحدة من بين العديد من الأدوات الأخرى التي توفرها لنا الرياضيات لقياس وحساب وفهم بيئتنا.

لكن عالم رياضيات ألماني من نهاية القرن التاسع عشر ذهب إلى أبعد من أي شخص آخر في ذلك الوقت للتعامل مع اللانهاية، أو بشكل أكثر دقة المجموعات اللانهاية.

يسأل جورج كانتور نفسه سؤالاً بسيطاً: هل يمكننا مقارنة مجموعتين لا نهائيتين؟ هل يمكن لأحدهما أن يكون "أكبر" من الآخر؟

تكمن إجابته في الطريقة المستخدمة لمقارنة مجموعتين: فبدلاً من حساب عدد عناصر المجموعة الأخيرة ومقارنتها (وهو ما لا يمكننا القيام به مع مجموعة لا نهائية)، تتكون الطريقة من محاولة "إقران عنصر من المجموعة الأولى" مع عنصر من الثاني. إذا وجد كل عنصر شريكه ولم يبق أي عنصر بمفرده (نسمي هذا الاعتراض)، فيمكننا أن نقول بعد ذلك أن المجموعتين متساويتان. وتنطبق هذه الطريقة بشكل متساوٍ على المجموعات المحدودة واللانهاية.



المجموعتان A و B لهما نفس الحجم لأن هناك طريقة واحدة على الأقل لإقران كل عنصر من عناصر A مع عنصر من عناصر B (الازدواج)

بهذه الطريقة يمكننا إثبات أن حجم المجموعة (اللانهاية) من الأعداد الصحيحة الموجبة يساوي تمامًا حجم مجموعة الأعداد الصحيحة (الموجبة والسالبة).

والأهم من ذلك، أننا تمكنا أيضًا من توضيح أنه على الرغم من وجود عدد لا نهائي من الكسور بين عددين صحيحين، فإن حجم مجموعة الأعداد الصحيحة يساوي تمامًا حجم مجموعة الأرقام المكتوبة في صورة كسر.

ومع ذلك، فقد ثبت أيضًا أن مجموعة الأعداد الحقيقية (جميع الأرقام المكتوبة بفاصلة وعدد محدود أو لا حصر له من المنازل العشرية) كانت أكبر تمامًا من مجموعة الأعداد الصحيحة.

على الرغم من أن الأمر قد يبدو غير بديهي، إلا أنه من الممكن أن تكون اللانهايتان المختلفتان بنفس الحجم، ولكن على العكس من ذلك، ليست كل اللانهايات متساوية.

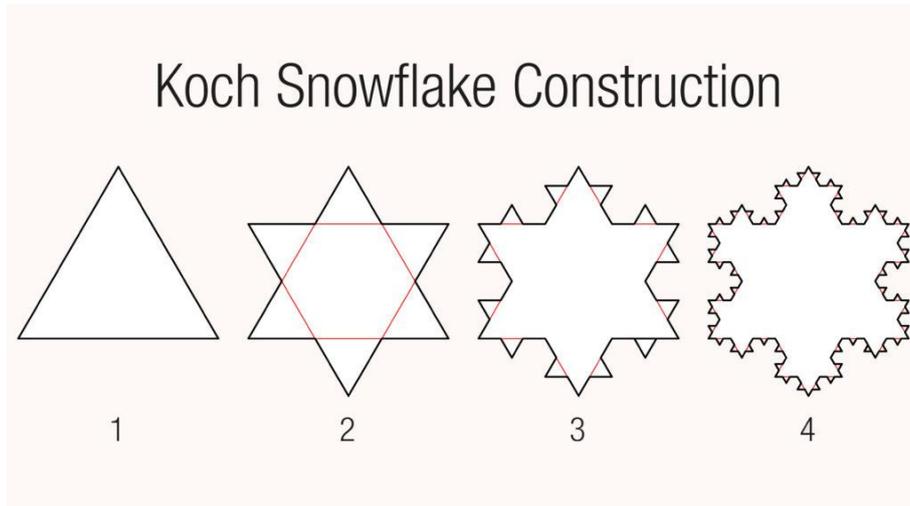
هندسات مستحيلة:

هل يمكننا رسم أشكال ذات معالم لا نهائية؟

إلى جانب الدائرة (التي يمكن اعتبارها مصلعًا بعدد لا نهائي من الجوانب)، بدأت أشكال غريبة أخرى في الظهور خلال النصف الثاني من القرن العشرين: الفركتلات.

إحدى الطرق لإنشائها هي بنائها بشكل متكرر، خطوة بخطوة. وبعد عدد لا نهائي من الخطوات، يتم الانتهاء من الشكل، ويمكننا دراسة خصائصه.

على سبيل المثال، تعتبر ندفة الثلج التي رسمها فون كوخ شخصية غير عادية: على الرغم من أن سطحها محدود، إلا أن محيطها لا نهائي.



يتم إنشاء ندفة الثلج Von Koch عن طريق إضافة مثلث على كل حافة من الشكل السابق... إلى ما لا نهاية.

وقد تم تطبيق هذا النوع من الهندسة بنجاح في مجال الاتصالات. منذ نهاية الثمانينات، قمنا بتطوير هوائيات كسورية، طولها كبير جدًا، إن لم يكن لانهايتيًا، ولكن حجمها يظل منخفضًا، مما يجعل من الممكن الحصول على أنظمة مدمجة وفعالة.

ملخص أطروحة بيير هنريكيت، دكتور في الفيزياء النووية وكاتب عمود في Polytechnique
Insights

بعد حصوله على درجة الدكتوراه في الفيزياء النووية في الطب ودرجة جامعية في علم الفلك/الفيزياء الفلكية، عمل بيير هنريكيت لمدة 10 سنوات في القبة السماوية في بلدة فولكس أون فيلين حيث أتقن مهاراته في الترويج مع العديد من الجماهير أو المبتدئين أو المتخصصين. واليوم، يقدم خدماته في الكتابة العلمية والوساطة بشكل مستقل. من دراساته وأبحاثه: "الكم، حليف أساسي للطب الحديث" " الصحة والتكنولوجيا والفضاء: الكم يفيد بالفعل العديد من القطاعات" " لقد غيرت فيزياء الكم وجه العالم بالفعل" " الفضاء: ما هي التحديات التكنولوجية والجيوسياسية التي تواجه أوروبا؟" " الرحلة إلى المريخ: أسطورة أم حقيقة؟"

23 فبراير 2022